CONCOURS 1980

OPTION M

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

Les deux parties du problème sont, dans une large mesure, indépendantes.

I

1° Dans l'espace euclidien affine, rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ du centre O et de rayon $a > 0$, et la courbe $\mathcal{D}$, passant par le point A $(a, 0)$, admettant le cercle $\mathcal{C}$ comme développée. On note M un point quelconque de $\mathcal{D}$ et C le centre de courbure de $\mathcal{D}$ en M.

a. Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ en fonction de φ, mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OC})$, modulo 2π.

b. On oriente $\mathcal{D}$ dans le sens correspondant à celui de φ croissant et on note s l'abscisse curviligne de M, mesurée à partir de A.

On pose :

$$\vec{\tau} = \frac{\overrightarrow{dM}}{ds} \quad \text{et} \quad V = (\overrightarrow{OM}, \vec{\tau}).$$

O étant le pôle et $\overrightarrow{Ox}$ l'axe polaire de vecteur unitaire $\vec{i}$, on note (ρ, θ) un système de coordonnées polaires de M.

Calculer ρ, θ et φ en fonction de V. (Il est conseillé d'étudier la figure géométrique.)

2° M décrit $\mathcal{D}$ selon la loi des aires par rapport à O; la constante des aires C est strictement positive et φ reste strictement positif.

a. Calculer la vitesse de M en fonction de φ.

b. Donner une équation de l'hodographe par rapport à O, du mouvement de M, et construire cette courbe.

c. Calculer l'accélération de M en fonction de ρ, le rayon vecteur de M, et calculer le rayon de courbure de l'hodographe au point correspondant, en fonction de ρ.

3° Soit Q le milieu de MC.

a. Prouver que le vecteur vitesse de Q est perpendiculaire à OM.

b. Dans cette question seulement, on suppose que M décrit une courbe Γ; s est l'abscisse curviligne de M, C le centre de courbure de Γ en M et K le centre de courbure de la développée de Γ en C. Prouver que la tangente à la courbe décrite par Q est perpendiculaire à KM.

c. On revient au mouvement de M défini au § 2. Q est mobile par rapport au repère de Frenet $\mathcal{F}$, d'origine M. $\mathcal{F}$ est considéré comme un solide en mouvement par rapport à S_0, repéré par l'axe polaire Ox : c'est le mouvement d'entraînement de Q.

Donner en fonction de φ, dans le repère $\mathcal{F}$, les vecteurs vitesse relative et vitesse d'entraînement de Q.

d. Calculer les vecteurs accélération absolue, relative, complémentaire et d'entraînement de Q. En déduire l'accélération normale de Q et le rayon de courbure de la trajectoire de Q.

II

Dans l'espace euclidien affine rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R}_0$ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le paraboloïde de révolution Σ d'équation :

$$x^2 + y^2 = 2az$$

et les courbes $\mathcal{H}$ tracées sur Σ, telles que les tangentes en tout point de $\mathcal{H}$ forment un angle constant avec Oz, de mesure $\frac{\pi}{4}$.

Soit $\vec{u}$ le vecteur défini par : $\vec{u} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$.

Le point P, tel que : $\overrightarrow{OP} = \rho \vec{u} + z \vec{k}$, admet (ρ, θ, z) comme système de coordonnées semi-polaires.

1° Écrire l'équation différentielle liant ρ et θ pour que P décrive une courbe $\mathcal{H}$.

Posant : $\sqrt{\rho^2 - a^2} = a \operatorname{tg} V$, calculer ρ et θ en fonction de V.

Montrer qu'une des courbes $\mathcal{H}$, notée $\mathcal{H}_0$, se projette sur le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ selon la courbe $\mathcal{D}$ de la partie I.

2° On note $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ les vecteurs unitaires du trièdre de Frenet $\mathcal{F}$ des points P de $\mathcal{H}_0$, et σ l'abscisse curviligne de P sur $\mathcal{H}_0$, comptée à partir du point $\left(a, 0, \frac{a}{2}\right)$.

a. Calculer les coordonnées de P dans le repère $\mathcal{R}_0 (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Calculer, en fonction de tg V, les composantes de $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ dans $\mathcal{R}_0$.

b. Calculer le rayon de courbure R et le rayon de torsion T de $\mathcal{H}_0$ en fonction de tg V.

3° P décrit $\mathcal{H}_0$ avec une vitesse numérique constante a : $\vec{V}(P) = a \vec{\tau}$.

a. Calculer, dans le repère de Frenet, les composantes du vecteur rotation instantané du mouvement de $\mathcal{F}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$.

b. Préciser la position de Δ, axe instantané de vissage du mouvement de $\mathcal{F}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$. Quelle est la surface engendrée par Δ dans $\mathcal{R}_0$? Quelle est la surface engendrée par Δ dans $\mathcal{F}$? Calculer la vitesse de glissement de $\mathcal{F}$.

4° Prouver que le torseur des vitesses des points de $\mathcal{F}$ se décompose, de façon unique, en la somme de deux glisseurs, dont l'un a pour axe central (ou support), la tangente en P à $\mathcal{H}_0$.

Préciser ces deux glisseurs et le second axe central.

5° On définit le point N par :

$$\overrightarrow{PN} = R \vec{n} + f(\sigma) \vec{b}$$

où R est le rayon de courbure de $\mathcal{H}_0$ et σ l'abscisse curviligne de P (cf. § 2).

Trouver f pour que le vecteur vitesse de N par rapport à $\mathcal{R}_0$ soit parallèle à $\vec{b}$. Préciser la relation qui existe entre $\mathcal{H}_0$ et la trajectoire de N. Donner la position du centre de courbure en N à la trajectoire de N. Montrer que le mouvement de $\mathcal{F}$ est composé de deux mouvements de rotation à définir.

1947 (1)

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail